ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$ (1).

(Μονάδες 10)

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$, να βρείτε (αν υπάρχει) τον αριθμό x σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $e^x = \omega_1$,

ii. $e^x = \omega_2$,

iii. $e^x = \omega_3$.

(Μονάδες 15)

2.

ΘΕΜΑ 4

Ο αριθμός των διαφορετικών ειδών των έμβιων όντων που υπάρχουν στις Μεγάλες Λίμνες της Β. Αμερικής, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{450}{1+8\cdot e^{-0,016t}}$ μετά t χρόνια από το έτος 1900. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή t παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.

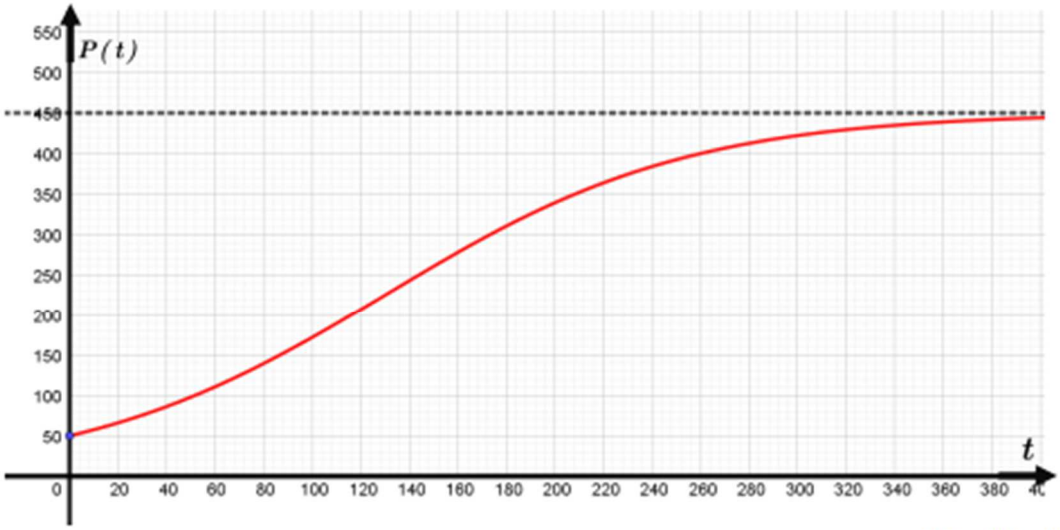
α) Να βρείτε πόσα είδη έμβιων όντων υπήρχαν το έτος 1900.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε, προσεγγιστικά, ποιο έτος θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(t)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τη μονοτονία της $P(t)$. Από ποια τιμή θα είναι πάντα μικρότερες οι τιμές $P(t)$;



(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $ln8 \cong 2,08$.

3.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\log 10 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\log 8 + \log 2 = 4\log 2$.

(Μονάδες 13)

Π.Μ.

4.

ΘΕΜΑ 4

Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα

$N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες.

(Μονάδες 9)

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000;

(Μονάδες 10)

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε.

(Μονάδες 6)

Δίνονται: $e^3 \cong 20$ και $ln(0,55) \cong -0,6$.

ΛΥΣΗ

α) Για $k = 20$, παίρνουμε $N = 1000 \cdot (1 - e^{-0,15 \cdot 20}) = 1000 \cdot (1 - e^{-3}) =$

$1000\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1000(1 - 0,05) = 1000 \cdot 0,95 = 950.$

β) Για $N = 450$, παίρνουμε $\frac{450}{1000} = 1 - e^{-0,15k} = 0,45$, άρα $e^{-0,15k} = 0,55$.

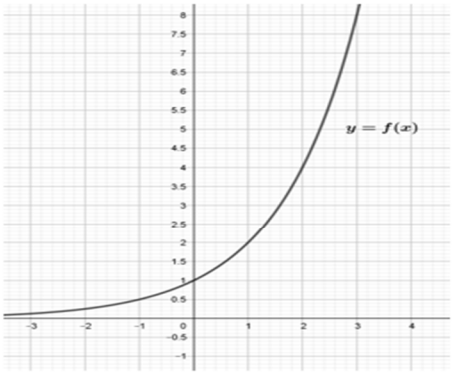
Έτσι, παίρνουμε $-0,15k = ln(0,55) = -0,6$, άρα $k = \frac{0,6}{0,15} = \frac{60}{15} = 4$ ημέρες.

γ) Για να γίνει γνωστή η φήμη σε όλα τα μέλη, θα πρέπει $N = P$, άρα $1 - e^{-0,15k} = 1$, οπότε αναγκαστικά θα είναι $e^{-0,15k} = 0$, κάτι που είναι αδύνατο, αφού $e^{-0,15k} > 0$ για κάθε k.

5.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

(Μονάδες 10)

β) Αν $f(x) = 2^x$,

i. Να βρείτε το $f(8)$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)

6.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(11) = 1$. (Μονάδες 15)

Π.Μ.

7.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 17 \\ 4\omega - 3\phi = 7 \end{cases}$$ (Μονάδες 10)

β) Αν η λύση του συστήματος (Σ) είναι $(\omega, \varphi) = (4,3)$ και $\ln x = \omega, \ln y = \varphi$, να βρείτε τους αριθμούς x και y. (Μονάδες 15)

8.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\log 0{,}01 = -2$ (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = -\log 0{,}01$ (Μονάδες 16)

9.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 4 + 4\log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 4$. (Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του αριθμού x≠0 ισχύει $\ln x^2 = \frac{A}{2}$ (Μονάδες 12)

10.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τον αριθμό $p = log4 + 2 \cdot log5$.

α) Να αποδείξετε $log4 = 2log2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $lnx = p$. (Μονάδες 10)

11.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι μία προσεγγιστική τιμή για τον δεκαδικό λογάριθμο $\log 2$ είναι το 0,30. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων: $\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$ και $\log \theta^k = k \log \theta$ για να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τους δεκαδικούς λογάριθμους:

α) $\log 4$ (Μονάδες 12)

β) $\log 5$ (Μονάδες 13)

12. ΘΕΜΑ 4

Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10 \cdot logx$, τότε:

α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200. (Μονάδες 8)

γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς x. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13. (Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $log2 = 0{,}3$ και $10^{\frac{6}{5}} \cong 15{,}85$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 10$ παίρνουμε $y = 1 + 10 \cdot log10 = 1 + 10 \cdot 1 = 11$.

β) Για $x = 200$ παίρνουμε $y = 1 + 10 \cdot log200 = 1 + 10 \cdot log(2 \cdot 10^2)$, οπότε $y = 1 + 10(log2 + log10^2) = 1 + 10(0{,}3 + 2) = 1 + 23 = 24$.

γ) Έχουμε: $y - 1 = 10 \cdot logx$, οπότε $logx = \frac{y-1}{10}$, άρα $x = 10^{\frac{y-1}{10}}$.

δ) Για $y = 13$, παίρνουμε $x = 10^{\frac{12}{10}} = 10^{\frac{6}{5}} \cong 15{,}85$.

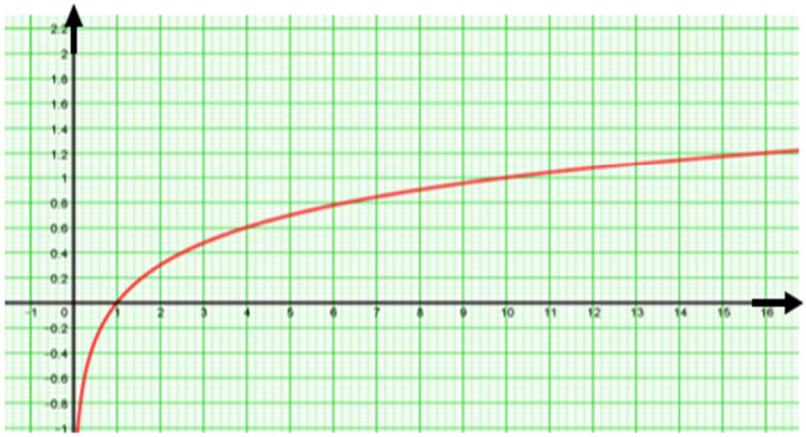
13. ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = logx, x > 0$ και $g(x) = log(10x - 20), x > 2$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $g(2{,}1)$ και $g(12)$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 1 + f(x - 2)$. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. (Μονάδες 7)



Π.Μ.